

Численные методы линейной алгебры

Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Одним из способов в науке. Во вычислениях приходится решать системы лн. уравнений

$$Ax = f, \quad (1)$$

где A - квадратная матрица $n \times n$ (порядка n), $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - вектор неизвестных, $f = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ - заданный вектор.

∃ 2 группы числ. методов решения (1):

1 - прямые

2 - итерационные

Метод (правило) Крамера

(Используем метод индукции)

$n=2$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2,$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} f_1 & a_{12} \\ f_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det A},$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & f_1 \\ a_{21} & f_2 \end{pmatrix}}{\det A},$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0!$$

$n!$ операций
 $n-1$ умножений в каждой строке
 $n-1$ строк в каждой операции

т.е. необходимо вычислять $n+1$ определителей порядка n .

$n=3$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \Rightarrow 6 \text{ операций, т.е. } n!$$

$n-1=2$ умножения в каждой строке, $n-1$ строк в каждой операции

Чтобы операцией с вектор. числами:

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ \text{операций} \\ \text{теплов} \end{pmatrix} \times \left[\begin{matrix} n! \text{ операций} \\ \times (n-1) \end{matrix} \right] \approx n^2 n!$$

число операций в определителе

При больших n - порядок операций = $O(n!)$

Сам. оценка:

ка. времени потребуется на соврем. компьютерах для решения системы $n=10$ и $n=50$? года?

В реальных задачах n - десятки и сотни \Rightarrow метод, основанный на вычислении определителей - неэффективен / не работоспособен.
 1 TFLOPS = 10^{12} опер/сек 1 PFLOPS = 10^{15}

Китайский суперкомпьютер,
самый мощный
в 2016 году —
9.3 PFLOPS = 10¹⁵ FLOPS
Sunway TaihuLight

$$\frac{3 \cdot 10^{64}}{10^{17} \text{ FLOPS}} \text{ (секунд для всех операций)} \approx 10^{39} \text{ лет!}$$

60с · 60мин · 24час · 365дней

Суперкомпьютер в США запущен в 2022 году, 8.7 млн вычислительных ядер, \$600 млн.

1 эксафлопс = 1000 PFLOPS = 10¹⁸ FLOPS

